Dílčí součinitele a metoda FORM

Milan Holický
Kloknerův ústav ČVUT v Praze

1. Úvod
2. FORM
3. Návrhové hodnoty
4. Dílčí součinitele
5. Příklady

FORM 2 pro $g(X) = R - E$

List RORM2lin.xls - iterační výpočet indexu spolehlivosti metodou FORM

Funkce mezního stavu **g(*X*)= *R* - *E***

Základní veličiny R a E se aproximují tří parametrickým lognormálním rozdělením LN(mu,sigma, skew), které přechází na normální rozdělení pro nulovou šikmost skew = 0.

skew = 3 V + V^3 pro dvouparametrické lognormální rozdělení, V=sigma/mu

skew = 1,14 pro Gumbelovo rozdělení

skew = 2 V pro Gamma rozdělení

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Vstupní hodnoty			Odhad (muR+mu		0,75		Lognormální rozdělení R a E		
X	mu	sigma	skew	C	x0	N.bod x	u	uu	phiX	PHIX
R	1,000	0,100	0,500	0,165	0,395	0,899	-1,008	-1,029	2,83944	0,15184
E	0,500	0,100	1,000	0,322	0,190	0,899	3,992	2,788	0,03670	0,99735
	Podmínky pro bod x			F11<G11		F12<G12		jinak neplatný výsledek		
Iteratční výpočet metodou FORM - nová hodnota x1 do G1 Požadovaná přesnost beta										0,00100
	Ekviv. normální		Index	Citlivost	Nové x	FORM			Počet n	2
X	mue	sigmae	beta	alpha	x			beta n	beta n-1	Rozdíl
R	0,984	0,083	$\boxed{2,972}$	0,348	0,899			$\boxed{2,97174}$	2,97132	0,00042
E	0,277	0,223		-0,937	0,899					
R-E	0,707	0,23785	Součet čt	1			Pf=	0,0015		

FORM and partial factors in ENs

(1) FORM sensitivity factors

$$\alpha_{Xi} = \frac{\dfrac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_i}}{\sqrt{\sum_j \left(\dfrac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_j}\right)^2}} \left[= \frac{\pm \sigma_{Xi}^e}{\sqrt{\sum_j (\sigma_{Xj}^e)^2}} \right]$$

EN 1990: $\alpha_E \approx -0{,}7$ $\alpha_R \approx 0{,}8$

(2) Design values

$$\Phi_{Xi}(x_{id}) = \Phi_U(-\alpha_{Xi}\beta)$$

EN 1990: β = 3,8 for 50 years

(3) Partial factors γ_{Xi}

For $\alpha_{Xi} < 0$, actions $\longrightarrow$ $\gamma_{Xi} = x_{id} / x_{ik}$

For $\alpha_{Xi} > 0$, resistance $\longrightarrow$ $\gamma_{Xi} = x_{ik} / x_{id}$

Design values

The leading actions

$$\mathrm{P}(R < R_\mathrm{d}) = \Phi_U(-\alpha_R\beta) = \Phi_U(-0{,}8\beta)$$

$$\mathrm{P}(E > E_\mathrm{d}) = \Phi_U(+\alpha_E\beta) = \Phi_U(-0{,}7\beta)$$

The accompanying actions

$$\mathrm{P}(R < R_\mathrm{d}) = \Phi_U(-0{,}4\ \alpha_R\beta) = \Phi_U(-0{,}32\beta)$$

$$\mathrm{P}(E > E_\mathrm{d}) = \Phi_U(+0{,}4\ \alpha_E\beta) = \Phi_U(-0{,}28\beta)$$

Resistance R: $\gamma_R = R_{\mathrm{k}}/R_{\mathrm{d}}$

Normal distribution

$$R_{\mathrm{k}} = \mu_R - 1{,}645 \times \sigma_R = \mu_R(1 - 1{,}645 \times V_R)$$

$$R_{\mathrm{d}} = \mu_R - \alpha_R \times \beta \times \sigma_R = \mu_R - 0{,}8 \times \beta \times \sigma_R = \mu_R(1 - 0{,}8 \times \beta \times V_R)$$

$$\gamma_R(\beta) = (1 - 1{,}645 \times V_R) \,/\, (1 - 0{,}8 \times \beta \times V_R)$$

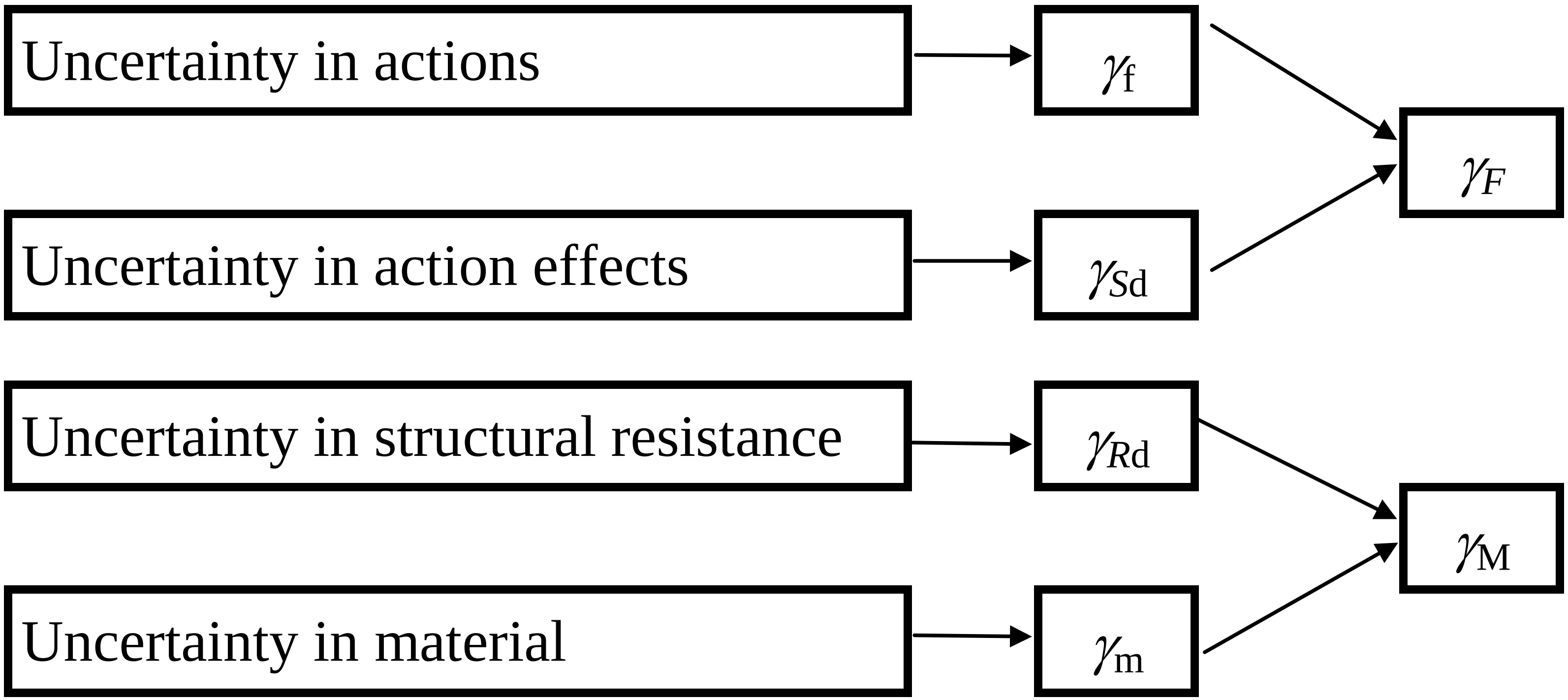
Lognormal distribution

$$R_{\mathrm{k}} = \mu_R \times \exp\,(- 1{,}645 \times V_R)$$

$$R_{\mathrm{d}} = \mu_R \times \exp\,(-\alpha_R \times \beta \times V_R)$$

$$\gamma_R\,(\beta) = \exp\,(- 1{,}645 \times V_R) \,/\, \exp\,(-\alpha_R \times \beta \times V_R)$$

Partial factors in EN 1990



$\gamma_F = \gamma_f\, \gamma_{Sd}, \quad \gamma_M = \gamma_m\, \gamma_{Rd}, \gamma_{Sd} \sim \gamma_{Rd} \sim 1{,}05$

Notation as in Figure C3 in EN 1990

Partial factor for the resistance R

Normal

$$\gamma_R = \frac{R_\mathrm{k}}{R_\mathrm{d}} = \frac{\mu_R + u_p\,\sigma_R}{\mu_R - \alpha_R\,\beta\,\sigma_R} = \frac{1 - 1{,}645 \times V_R}{1 - 0{,}8 \times 3{,}8 \times V_R}$$

Lognormal

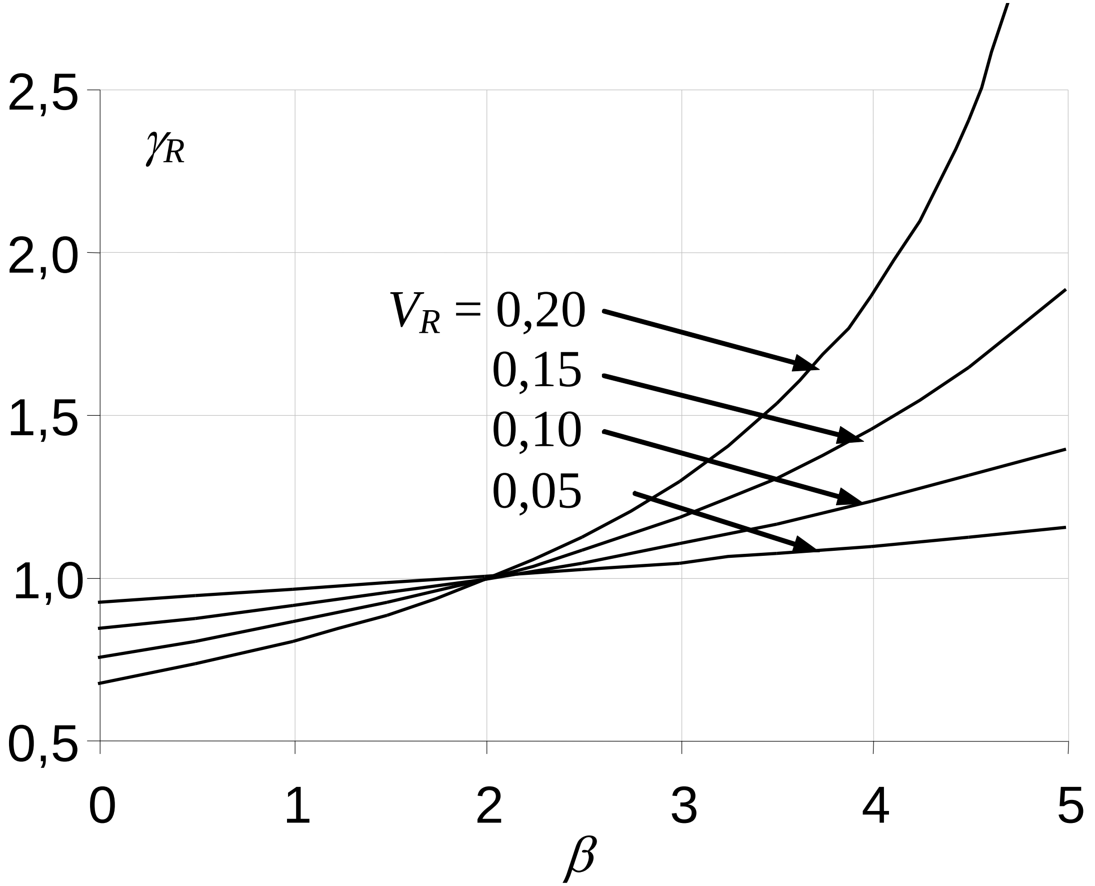
$$\gamma_R = \frac{R_\mathrm{k}}{R_\mathrm{d}} = \frac{\exp(u_p\,\sigma_R)}{\exp(-\alpha_R\,\beta\,\sigma_R} = \frac{\exp(-1{,}645 \times V_R)}{\exp(-0{,}8 \times 3{,}8 \times V_R)}$$

V_R	0	0,05	0,1	0,15	0,20
γ_R normal	1,0	1,08	1,20	1,38	1,71
γ_R lognormal	1,0	1,07	1,15	1,23	1,32

In EN 1990 $\gamma_R = \gamma_\mathrm{m}$, $\gamma_\mathrm{M} = \gamma_\mathrm{m}\,\gamma_{Rd}$ where γ_{Rd} uncertainty in R

Partial factor of resistance *R*

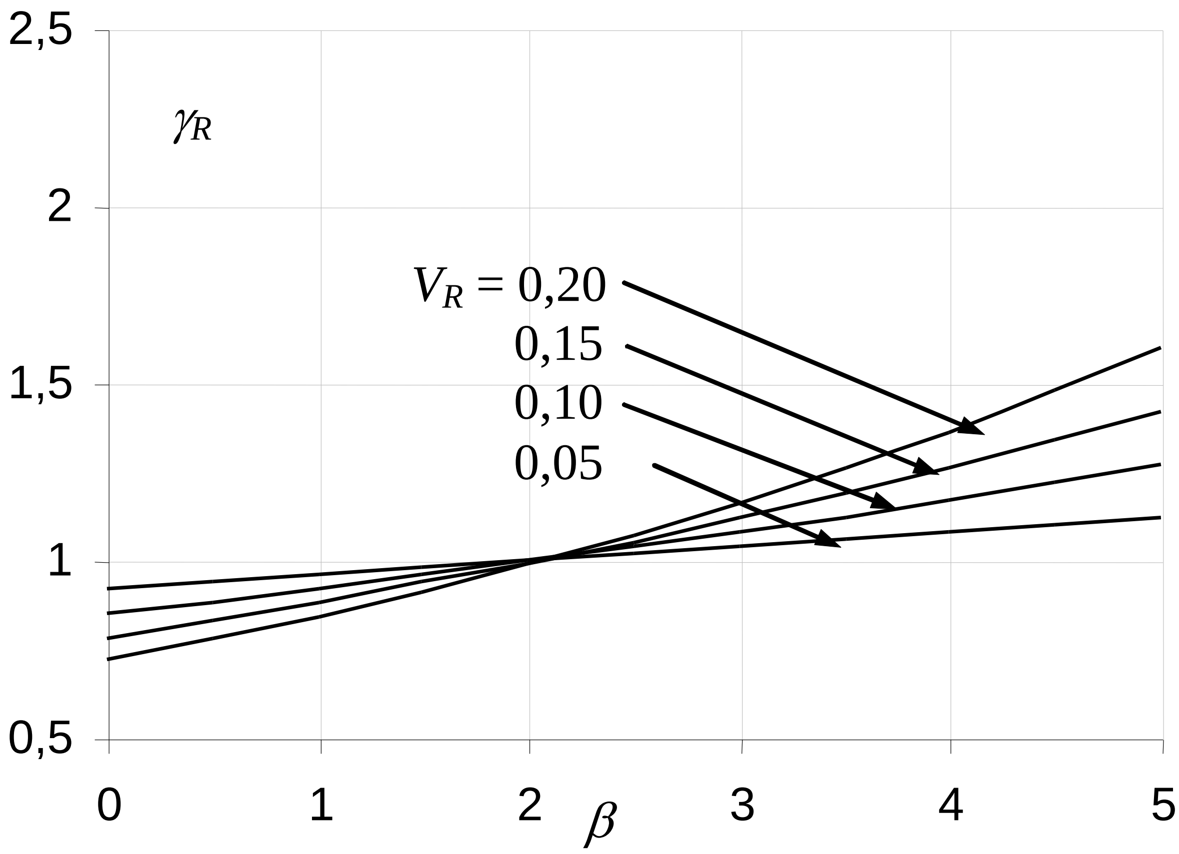
$$\gamma_R(\beta) = (1 - 1{,}645 \times V_R) / (1 - \alpha_R \times \beta \times V_R)$$



Variation of γ_R with β for normal distribution of *R*

Partial factor of resistance R

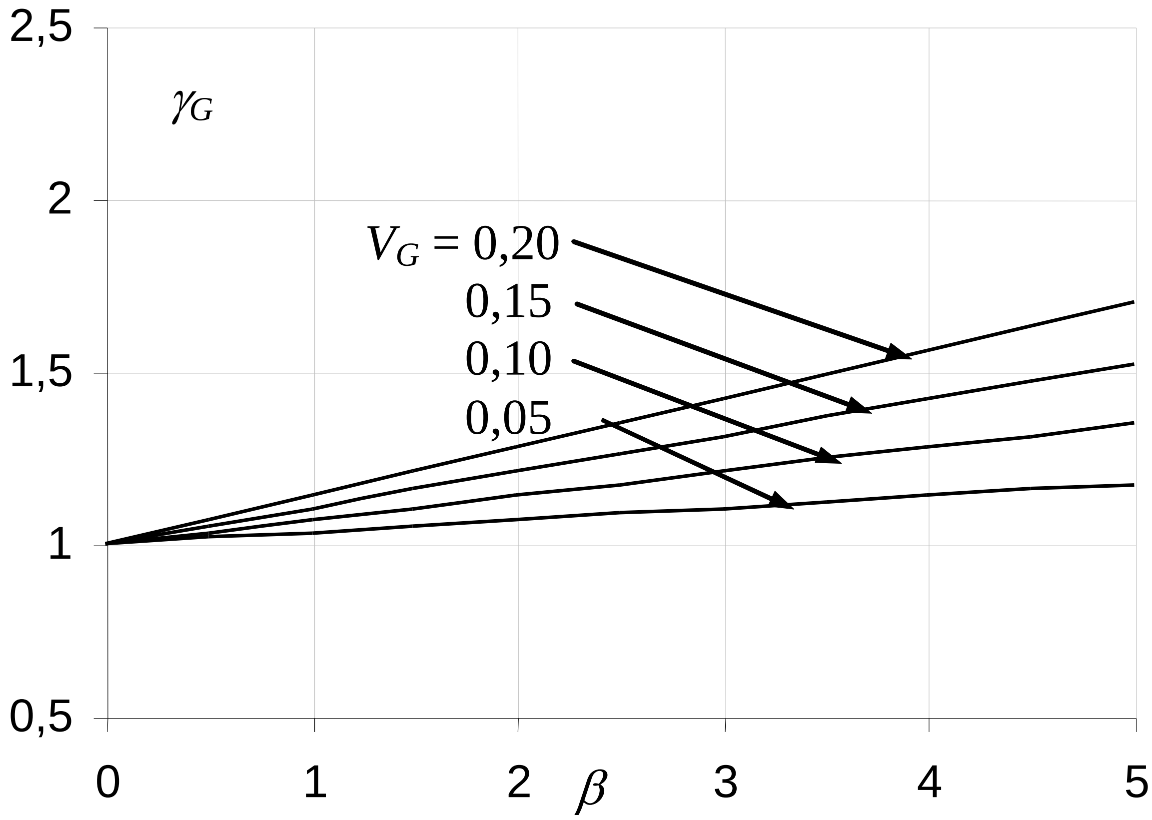
$$\gamma_R(\beta) = \exp\,(-\,1{,}645 \times V_R)\,/\,\exp\,(-\alpha_R \times \beta \times V_R)$$



Variation of γ_R with β for lognormal distribution of R

Partial factor of permanent load G

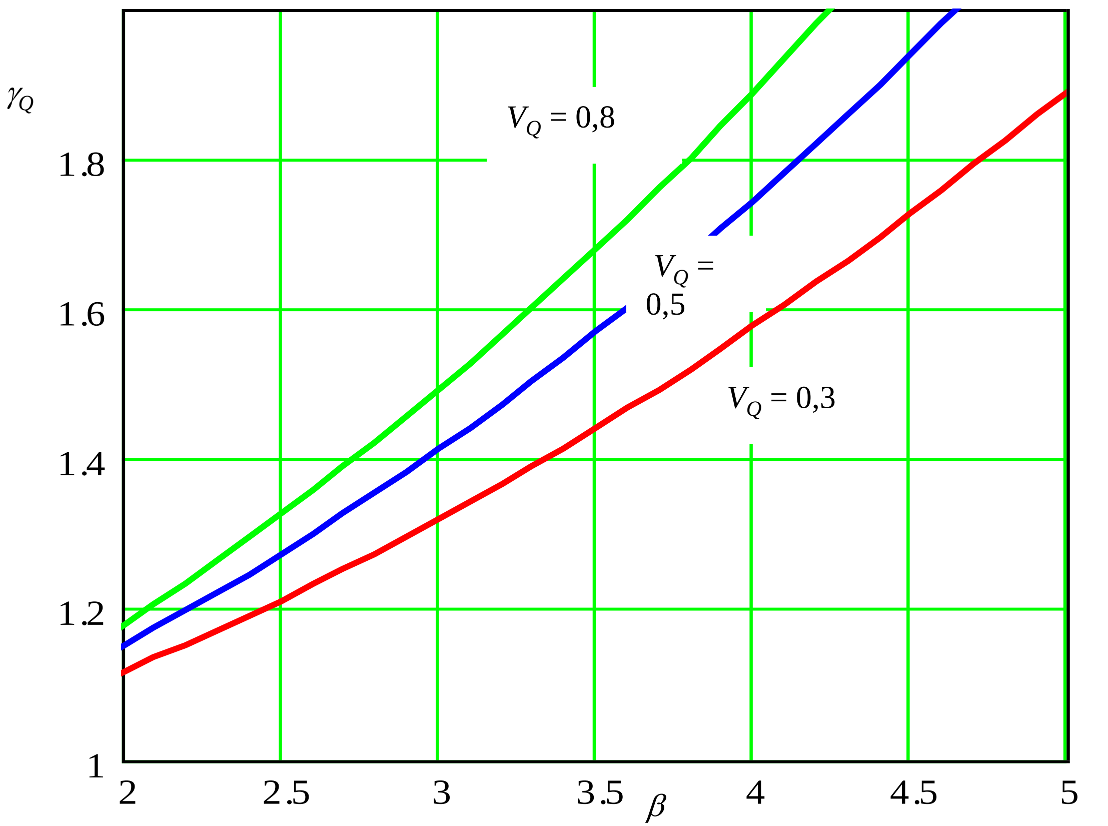
$$\gamma_G(\beta) = (1 + 0{,}7\times \beta \times V_G)$$



Variation of γ_G with β for normal distribution of G

Variable action Q – Gumbel distribution

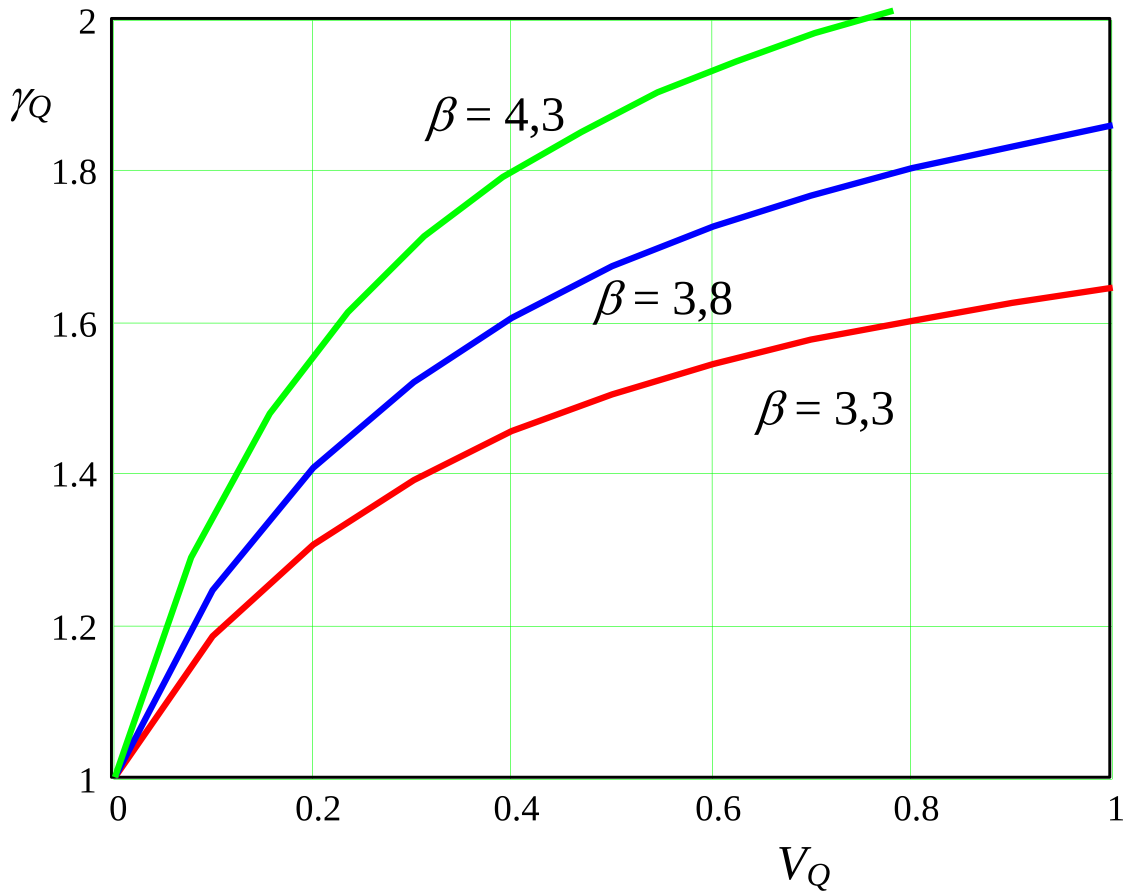
$$\gamma_Q(\beta) = (1 - V_Q\,(0{,}45 - 0{,}78\ln(N) + 0{,}78\ln(-\ln(\Phi^{-1}(-\alpha E\beta)))) \;/$$
$$/(1 - V_Q\,(0{,}45 + 0{,}78\ln(-\ln(0{,}98))))$$



Variation of γ_Q with the reliability index β for N= 10

Variable action Q – Gumbel distribution

$$\gamma_Q(V_Q) = (1 - V_Q\,(0{,}45 - 0{,}78\ln(N) + 0{,}78\ln(-\ln(\Phi^{-1}(-\alpha_E\beta)))) \,/$$
$$/(1 - V_Q\,(0{,}45 + 0{,}78\ln(-\ln(0{,}98))))$$



Variation of γ_Q with the coefficient V_Q for N= 10

FORM a dílčí součinitele v EN

(1) Součinitele citlivosti metody FORM

$$\alpha_{Xi} = \frac{\dfrac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_i}}{\sqrt{\sum_j \left(\dfrac{\partial g(\mathbf{U})}{\partial U_j}\right)^2}} \left[= \frac{\pm \sigma^e_{Xi}}{\sqrt{\sum_j (\sigma^e_{Xj})^2}} \right]$$

EN 1990: $\alpha_E \approx -0{,}7$ $\alpha_R \approx 0{,}8$

(2) Návrhové hodnoty $\Phi_{Xi}(x_{id}) = \Phi_U(-\alpha_{Xi}\beta)$

EN 1990: β = 3,8 pro 50 let

(3) Dílčí součinitele γ_{Xi}

Pro $\alpha_{Xi} < 0$, zatížení $\longrightarrow$ $\gamma_{Xi} = x_{id} / x_{ik}$

Pro $\alpha_{Xi} > 0$, odolnost $\longrightarrow$ $\gamma_{Xi} = x_{ik} / x_{id}$

Metoda návrhových bodů

Podmínka $g(X_i) > 0$ se nahrazuje

$$g(x_{di}) = g(x_{d1}, x_{d2}, x_{d3}, \ldots) > 0$$

kde návrhový bod x_{di} základní veličiny X_i se stanoví:

pro libovolné rozdělení

$$\Phi_{Xi}(x_{di}) = \Phi(-\alpha_i\beta)$$

pro normální rozdělení

$$x_{di} = \mu_i(1-\alpha_i\beta V_i)$$

pro lognormální rozdělení

$$x_{di} = (\mu_i/\sqrt{(1+V_i^2)})\exp(-\alpha_i\beta\sqrt{\ln(1+V_i^2)}) \cong \mu_i\exp(-\alpha_i\beta V_i)$$

Zjednodušené pravděpodobnostní pojetí spolehlivosti v Eurokódech

- **Index spolehlivosti** $\beta = \dfrac{\mu_G}{\sigma_G} = \dfrac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$

- **Návrhové hodn.** $R_\mathrm{d} = \mu_R - \beta\alpha_R\sigma_R, E_\mathrm{d} = \mu_E - \beta\alpha_E\sigma_E$

- **Váhové součinitele**
a aproximace v EC

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \approx 0.8$$

$$\alpha_E = -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} \approx -0.7$$

Normované součinitele α_i

	X_i	$\boldsymbol{\alpha_i}$
Odolnost:	**Dominantní odolnost**	**0,8**
	Ostatní	**0,32=0,4 ×0,8**
Zatížení:	**Dominantní zatížení**	**–0,7**
	Ostatní	**–0,27= – 0,4×0,7**

Příklad: Pro funkci g(*X*) = *R* – *E* a normální *R* a *E*, podmínka
$g(x_{d1}, x_{d2}, x_{d3}, \ldots) > 0$ zní

$$\mu_R(1-\alpha_R \beta V_R) - \mu_E(1-\alpha_E \beta V_E) > 0$$

Pro $\beta = 3{,}8$

$$\mu_R(1- 3{,}04 V_R) - \mu_E(1+ 2{,}66 V_E) > 0$$

Pro $V_R = 0{,}1$ a $V_R = 0{,}3$ vychází podmínka pro průměry

$$\mu_R > \mu_E(1{,}8/0{,}7) \cong 2{,}6\ \mu_E$$

Metoda návrhových bodů pro $E<R$

$$E_\mathrm{d} \le R_\mathrm{d}, \quad \text{pro}\ \beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$$

$$E_\mathrm{d} = \mu_E - \alpha_E\ \beta\ \sigma_E \qquad R_\mathrm{d} = \mu_R - \alpha_R\ \beta\ \sigma_R$$

$$E_\mathrm{d} = R_\mathrm{d} \Rightarrow \beta = \frac{\mu_R - \mu_E}{\alpha_R \sigma_R - \alpha_E \sigma_E}$$

Váhové součinitele:

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}, \quad \alpha_E = -\frac{\sigma_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$$

Dílčí součinitele

$$E_{\mathrm{d}} = \gamma_E \, E_{\mathrm{k}}, \quad R_{\mathrm{d}} = \frac{R_{\mathrm{k}}}{\gamma_R}$$

$$E_{\mathrm{d}} = \mu_E - \alpha_E \, \beta \, \sigma_E \qquad R_{\mathrm{d}} = \mu_R - \alpha_R \, \beta \, \sigma_R$$

$$\gamma_E = \frac{E_{\mathrm{d}}}{E_{\mathrm{k}}} = \frac{\mu_E - \alpha_E \, \beta \, \sigma_E}{\mu_E + u_p \sigma_E}, \gamma_R = \frac{R_{\mathrm{k}}}{R_{\mathrm{d}}} = \frac{\mu_R + u_p \, \sigma_R}{\mu_R - \alpha_R \, \beta \, \sigma_R}$$

EN 1990 pro dominantní: $\alpha_E = -\,0{,}7$; $\alpha_R = 0{,}8$

pro nedominantní: $-\,\alpha_E = \alpha_R = 0{,}4$

Partial factor for the resistance R

Normal

$$\gamma_R = \frac{R_\mathrm{k}}{R_\mathrm{d}} = \frac{\mu_R + u_p\,\sigma_R}{\mu_R - \alpha_R\,\beta\,\sigma_R} = \frac{1 - 1{,}645 \times V_R}{1 - 0{,}8 \times 3{,}8 \times V_R}$$

Lognormal

$$\gamma_R = \frac{R_\mathrm{k}}{R_\mathrm{d}} = \frac{\exp(u_p\,\sigma_R)}{\exp(-\alpha_R\,\beta\,\sigma_R} = \frac{\exp(-1{,}645 \times V_R)}{\exp(-0{,}8 \times 3{,}8 \times V_R)}$$

V_R	0	0,05	0,1	0,15	0,20
γ_R normal	1,0	1,08	1,20	1,38	1,71
γ_R lognormal	1,0	1,07	1,15	1,23	1,32

In EN 1990 $\gamma_R = \gamma_\mathrm{m}$, $\gamma_\mathrm{M} = \gamma_\mathrm{m}\,\gamma_{Rd}$ where γ_{Rd} uncertainty in R

Dílčí součinitele pro stálé zatížení *G*

$$G_\mathrm{d} = \gamma_G\, G_\mathrm{k}\,,\quad G_\mathrm{k} = \mu_G$$

$$\gamma_G = \frac{G_\mathrm{d}}{G_\mathrm{k}} = \frac{\mu_G - \alpha_E\, \beta\, \sigma_G}{\mu_G} = 1 + 0{,}7 \times 3{,}8 \times w_G$$

w_G	0	0,05	0,1	0,15
γ_G	1,0	1,13	1,27	1,40

Dílčí součinitele spolehlivosti - úroveň I

- **Zatížení - návrhové veličiny** $F_{\mathrm{d}} = \gamma_F F_{\mathrm{k}}$
- **Vlastnosti materiálů - n. v.** $f_{\mathrm{d}} = f_{\mathrm{k}} / \gamma_f$
- **Rozměry - náhodné veličiny** $a_{\mathrm{d}} = a_{\mathrm{k}} \pm \Delta a$

$$E_{\mathrm{d}}(F_{\mathrm{d}}, f_{\mathrm{d}}, a_{\mathrm{d}}) < R_{\mathrm{d}}(F_{\mathrm{d}}, f_{\mathrm{d}}, a_{\mathrm{d}})$$

$$\langle E_{\mathrm{d}} \rangle = \mu_E + 0.7\beta\sigma_E, \langle R_{\mathrm{d}} \rangle = \mu_R - 0.8\beta\sigma_R$$

- **Nedostatky**

  - rozdílné pravděpodobnosti poruchy nosných prvků z různých materiálů

  - nedostatek representativních dat

Návrhové hodnoty E_{d} a R_{d}

DOMINANTNÍ VELIČINY

$$P\{E > E_{\mathrm{d}}\} = \Phi(+\alpha_E \beta) = \Phi(-0{,}7\beta) = \Phi(-2{,}66) = 0{,}00391$$

$$P\{R < R_{\mathrm{d}}\} = \Phi(-\alpha_R \beta) = \Phi(-0{,}8\beta) = \Phi(-3{,}04) = \boxed{0{,}00118}$$

NEDOMINANTNÍ VELIČINY

$$P\{E > E_{\mathrm{d}}\} = \Phi(+0{,}4\alpha_E \beta) = \Phi(-0{,}28\beta) = \Phi(-1{,}064) = 0{,}143$$

$$P\{R < R_{\mathrm{d}}\} = \Phi(-0{,}4\alpha_R \beta) = \Phi(-0{,}32\beta) = \Phi(-1{,}216) \boxed{= 0{,}112}$$

Odolnost v Eurokódech

$$R_{\mathrm{d}} = R\left\{X_{\mathrm{k}} / \gamma_{\mathrm{M}}, a_{\mathrm{nom}}\right\}$$

ENV 1992 a 1995

$$R_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\gamma_R} R\left\{X_{\mathrm{k}}, a_{\mathrm{nom}}\right\}$$

ENV 1993

$$R_{\mathrm{d}} = \frac{1}{\gamma_{R\mathrm{d}}} R\left\{X_{\mathrm{k}} / \gamma_{\mathrm{m}}, a_{\mathrm{nom}}\right\}$$

ENV 1994

Závěrečné poznámky

- Teoretické postupy metody FORM umožňují stanovit dílčí součinitele pro zadanou úroveň spolehlivosti.
- Dílčí součinitele závisejí na β, variačním koeficientu V základních veličin a v případě proměnných zatížení také na poměru referenčních intervalů N.
- Dílčí součinitele doporučené v Eurokódech přihlížejí k nejistotám modelů odolnosti a účinku zatížení.
- Operativní postupy stanovení dílčích součinitelů se uplatňují při diferenciaci spolehlivosti nových i existujících konstrukcí.