Hodnocení vlastností materiálů podle ČSN EN 1990, přílohy D

Milan Holický
Kloknerův ústav ČVUT v Praze

1. Úvod
2. Kvantil náhodné veličiny
3. Hodnocení jedné veličiny
4. Hodnocení modelu
5. Příklady - pomůcky EXCEL

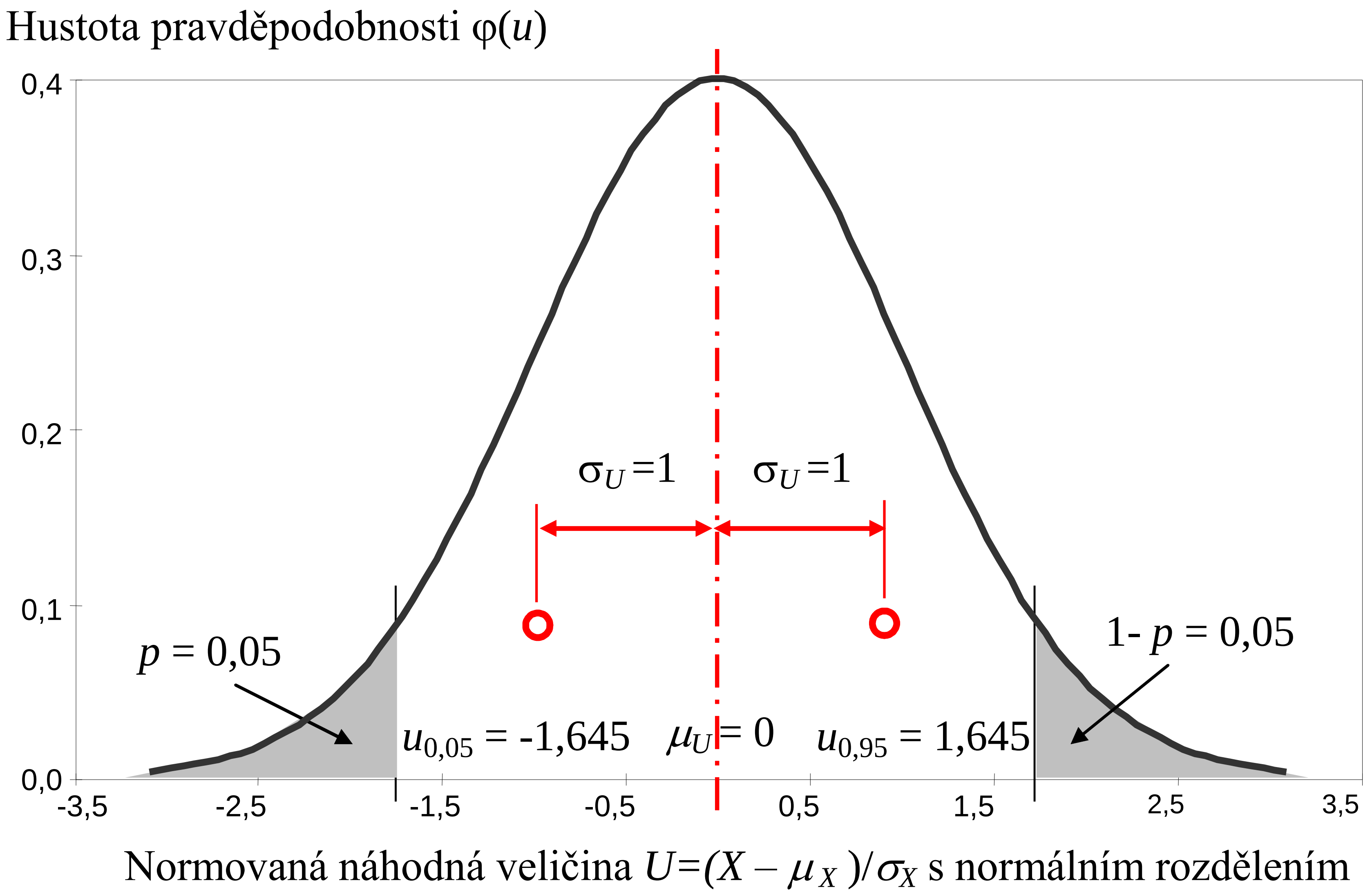
Obsah přílohy D

- D.1 Rozsah platnosti
- D.2 Značky
- D.3 Druhy zkoušek
- D.4 Plánování zkoušek
- D.5 Odvození návrhových hodnot
- D.6 Obecné zásady statistického hodnocení
- D.7 Stanovení jedné nezávislé vlastnosti (pevnosti)
- D.8 Stanovení modelů odolnosti (zkoušky prvků)

Obecné zásady statistického hodnocení

- Zkoušky jedné nezávislá vlastnost, např. pevnosti, modulu pružnosti:
  - velmi malý počet zkoušek (méně než 6) - statistické postupy se obtížně aplikují je možné využít předchozí informace (např. o variabilitě) – postupuje se podle D.7, nebo se využijí Bayesovské postupy podle ISO 2394.
  - větší počet zkoušek (6 a více) – běžné statistické postupy popřípadě doplněné předchozími informacemi (např. o variabilitě) – postupuje se podle D.7.
- Zkoušky celého prvku (např. nosníku, sloupu, styčníku), pro který je k dispozici teoretický model – postupuje se podle oddílu D.8.

Dolní a horní kvantil teoretického modelu



Kvantil teoretického modelu

$$x_p = \mu + u_p\,\sigma = \mu\,(1 + u_p\,V)$$

Kvantil u_p normované náhodné veličiny s normálním rozdělením.

p	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	0,001	0,010	0,050	0,100	0,200	0,500
u_p	-5,199	-4,753	-4,265	-3,719	-3,091	-2,327	-1,645	-1,282	-0,841	0,000

Kvantil u_p normované náhodné veličiny s lognormální rozdělení.

	Pravděpodobnosti p												
α	10^{-4}	10^{-3}	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	0,80	0,90	0,95	0,99	$1\text{-}10^{-3}$	$1\text{-}10^{-4}$
-1,0	-6,40	-4,70	-3,03	-1,85	-1,32	-0,74	0,15	0,84	1,13	1,34	1,68	1,99	2,19
0,0	-3,72	-3,09	-2,33	-1,65	-1,28	-0,84	0,00	0,84	1,28	1,65	2,33	3,09	3,72
1,0	-2,19	-1,99	-1,68	-1,34	-1,13	-0,84	-0,15	0.74	1,32	1,85	3,03	4,70	6,40

Kvantil lognormálního rozdělení

$$x_p = \frac{\mu}{\sqrt{1+V^2}} \exp\left(u_p \sqrt{\ln(1+V^2)} \right)$$

$$x_p \cong \mu \exp(u_p \times V)$$

Kvantil gumbelova rozdělení

$$x_p = x_{\mathrm{mod}} - \frac{1}{c} \ln(-\ln(p)) \cong \mu - (0{,}45 + 0{,}78 \ln(-\ln(p)))\,\sigma$$

Návrhové hodnoty ze souboru x_i ,i=1, n

- $m_X = (\sum x_i) /n$, $s_X = (\sum x_i - m_X) /n$, $V_X = s_X/m_X$
- Stanoví se charakteristická hodnota $X_{\mathrm{k(n)}}$ a ta se dělí dílčím součinitelem, popřípadě násobí převodním součinitelem (D.7 a D.8 ČSN EN 1990);

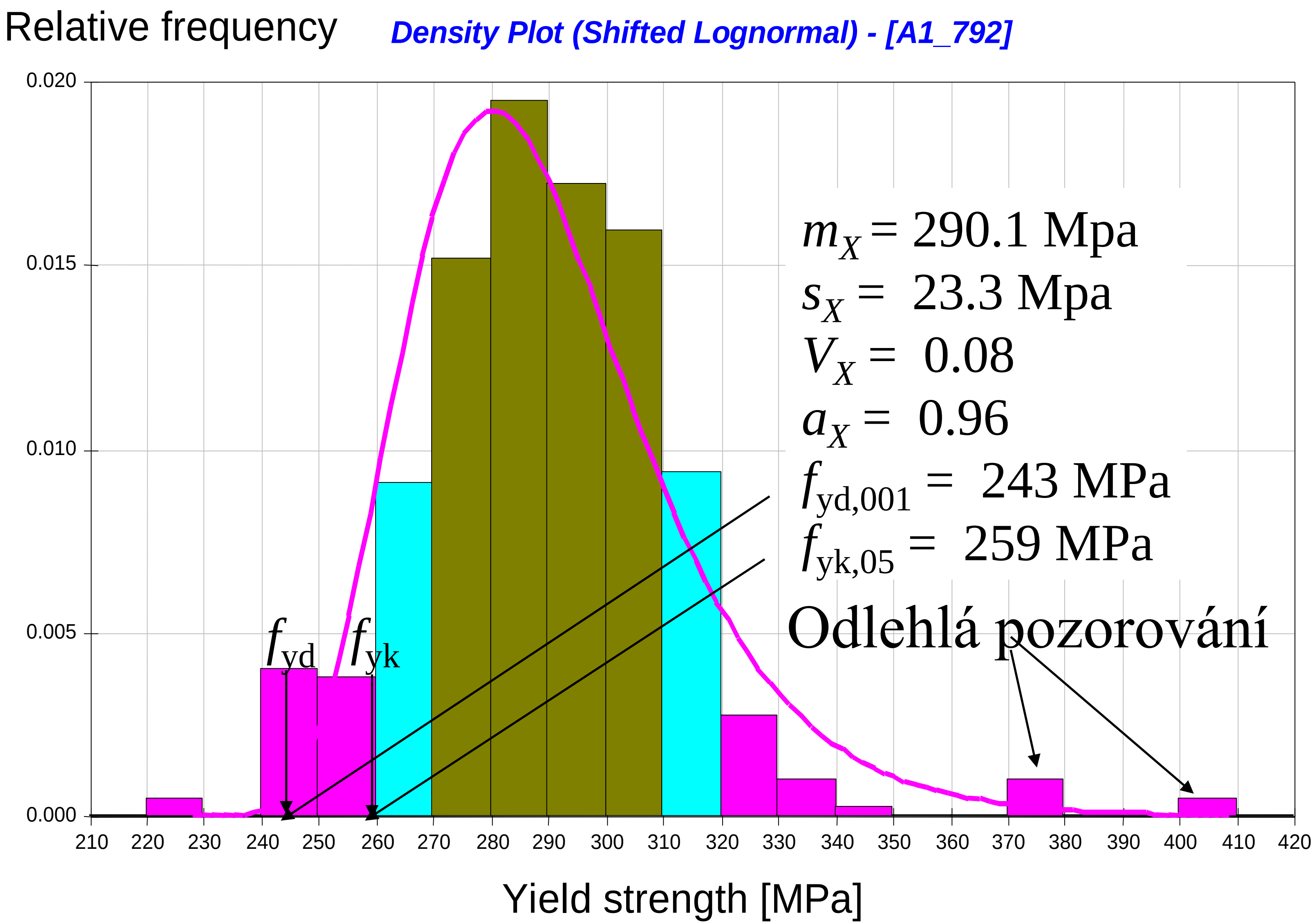
$$X_{\mathrm{k}(n)} = \eta_{\mathrm{d}}\, m_X \{1 - k_n V_X\}$$

$$X_{\mathrm{d}} = \eta_{\mathrm{d}} \frac{X_{\mathrm{k}(n)}}{\gamma_{\mathrm{m}}} = \frac{\eta_{\mathrm{d}}}{\gamma_{\mathrm{m}}} m_X \{1 - k_n V_X\}$$

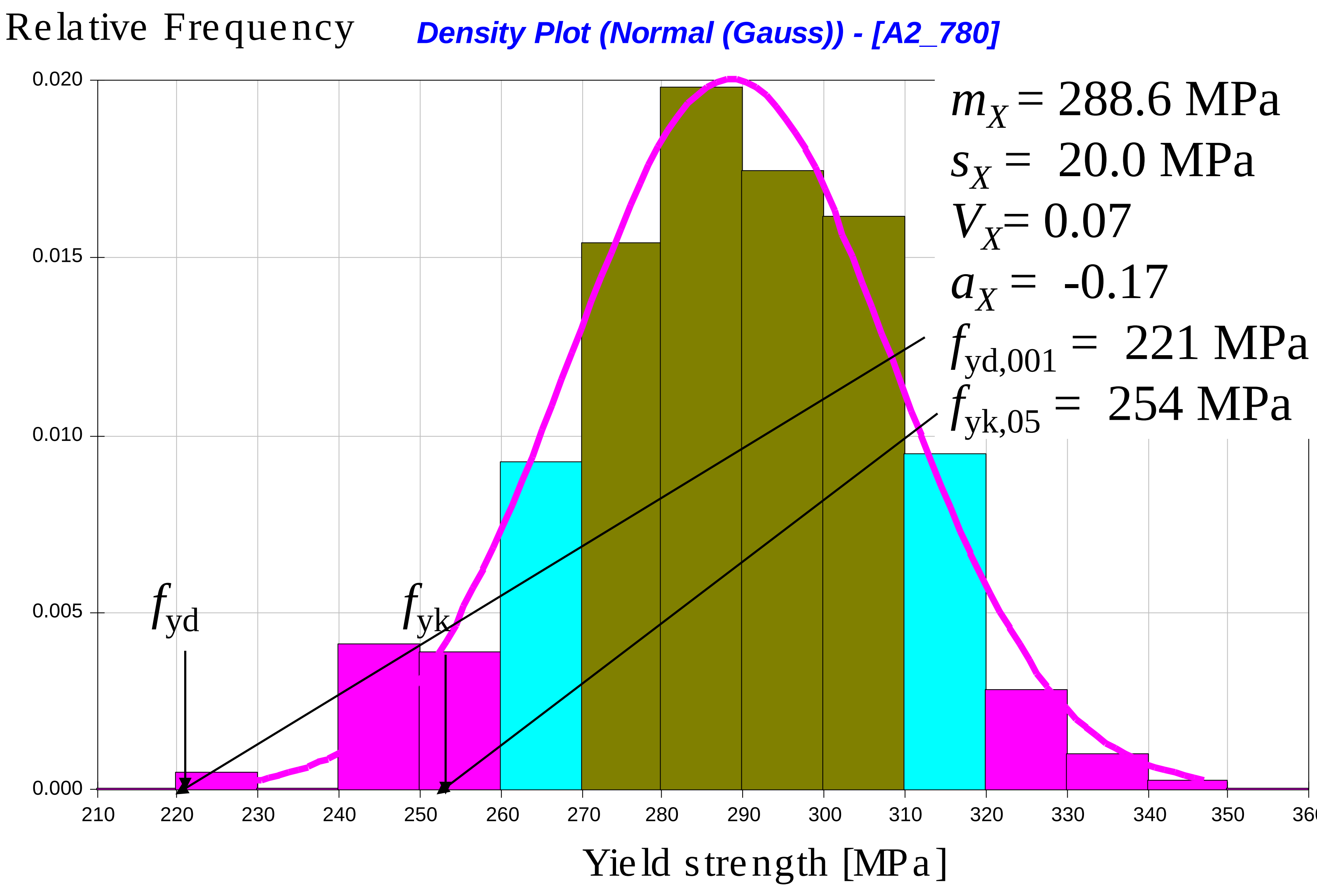
- Návrhová hodnota se stanoví přímo, s implicitním nebo explicitním uvážením konverze výsledků a celkové požadované spolehlivosti (D.7 a D.8 ČSN EN 1990).

$$X_{\mathrm{d}} = \eta_{\mathrm{d}}\, m_X\, (1 - k_{\mathrm{d},n}\, V_X)$$

Mez kluzu pro S 235 – 792 měření



Mez kluzu pro S 235 – 780 měření



Odhad kvantilu ze souboru

Základní metody

Pokryvná metoda: $x_{p,\mathrm{cover}}$ - confidence level γ :

$$P\{x_{\mathrm{p,cover}} < x_p\} = \gamma$$

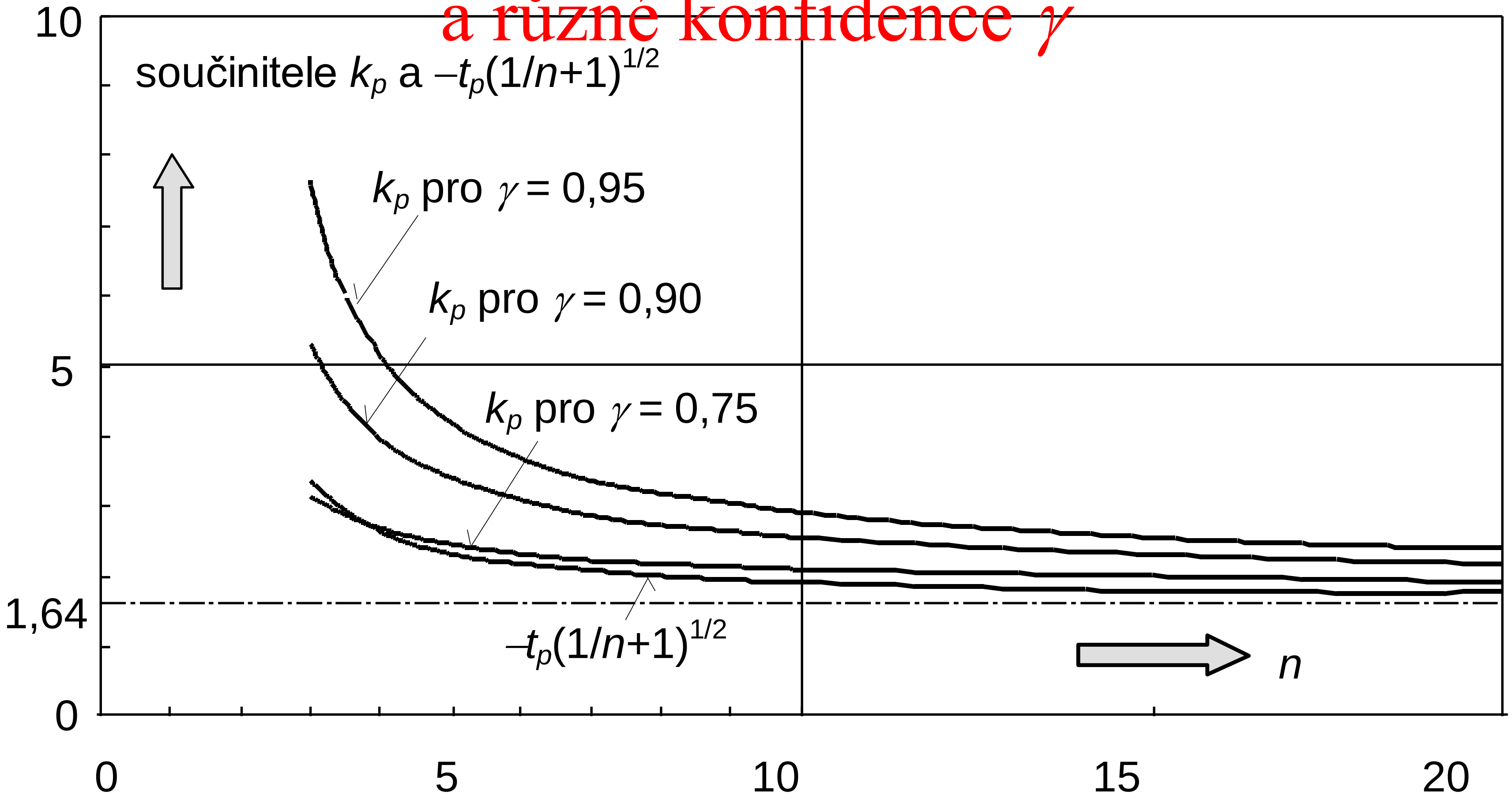
Předpovědní metoda: $x_{p,pred}$ - pravděpodobnost p výskytu příští hodnoty $x_{\mathrm{n+1}}$:

$$P\{x_{\mathrm{n+1}} < x_{p,pred}\} = p$$

Bayesovský přístup: kombinace pozorovaných datdata (s průměrem m a směrodatnou odchylkou s) a předchozích dat (m', s') pro kterou se stanoví výsledné charakteristiky (m'', s'') - pak se aplikuje pokryvná nebo předpovědní metoda

Vliv konfidence

Součinitele k_p a $-t_p(1/n+1)^{1/2}$ pro normální rozdělení a různé konfidence γ



Předpovědní metoda

Soubor: x_i, n, m, s, (σ)

$$P(x_{n+1} < x_{p,\,\mathrm{pred}}) = p$$

Známé σ

$$x_{p,\mathrm{pred}} = m + u_p\,(1/n + 1)^{1/2}\,\sigma$$

Neznámé σ - uvažuje se odhad s

$$x_{p,\mathrm{pred}} = m + t_p\,(1/n + 1)^{1/2}\,s$$

Odhad kvantilů podle Eurokódů

Odpovídá přibližně konfidenci $\gamma = 0,75$

Součinitele k_n pro 5% charakteristickou hodnotu .

Součinitel	Rozsah souboru n 1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$-u_p(1/n+1)^{1/2}$, σ známé	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
$-t_p(1/n+1)^{1/2}$, σ neznámé	-	-	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

. Součinitele k_n pro návrhovou hodnotu x_{d} dominantní veličiny, $P(X < x_{\mathrm{d}}) = 0,001$.

Součinitel	Rozsah souboru n 1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
$-u_p(1/n+1)^{1/2}$, σ známé	4,36	3,77	3,56	3,44	3,37	3,33	3,27	3,23	3,16	3,13	3,09
$-t_p(1/n+1)^{1/2}$, σ neznámé	-	-	-	11,4	7,85	6,36	5,07	4,51	3,64	3,44	3,09

Příklad odhadu kvantilu

BETON: n = 5, m = 29,2 MPa, s = 4,6 MPa

Pokryvná metoda

Pro γ = 0,75: $$x_{p,\mathrm{cover}} = 29{,}2 - 2{,}46 \times 4{,}6 = 17{,}9\ \mathrm{MPa}$$

Pro γ = 0,95: $$x_{p,\mathrm{cover}} = 29{,}2 - 4{,}20 \times 4{,}6 = 9{,}9\ \mathrm{MPa}$$

Předpovědní metoda

$$x_{p,\mathrm{pred}} = 29{,}2 - 2{,}33 \times 4{,}6 = 18{,}5\ \mathrm{MPa}$$

Navrhování pomocí zkoušek

Stanovení charakteristické a návrhové hodonoty podle ČSN EN 1990, článků D7.2 a D7.3

Pole vstupních dat (re v řádcích 6 až 51)	d =	1	m =	1,5	Gener. soub. X=	30	VX=	0,167

Pole výstupních dat (LN(re) v řádcích 6 až 51)

Statistické char.		kn	kd,n	Normální rozdělení Xk	Xd z Xk	Xd přímo	Lognormální rozdělení Xk	Xd z Xk	Xd přímo
n=	24	**Součinitele a hodnoty veličiny X pro neznámé VX**							
mX=	30,80	1,749	3,5568	21,56	14,37	12,01	22,46	14,97	16,45
sX=	5,28	**Součinitele a hodnoty veličiny X pro známé VX**							
VX=	0,17	1,679	3,154	21,93	14,62	14,14	22,74	15,16	17,63
mY=	3,41								
sY=	0,17								
Šikmost souboru X=	0,47151								

re	Ln(re)	Příklad Gen.soub.
34,02	3,53	22,04
29,76	3,39	24,87
29,55	3,39	28,85
26,50	3,28	24,59
35,25	3,56	28,10
32,70	3,49	27,50
29,49	3,38	31,11
30,22	3,41	25,17
29,39	3,38	25,40
21,71	3,08	34,00
32,61	3,48	25,43
32,73	3,49	30,13
32,79	3,49	34,42
33,30	3,51	22,93
23,18	3,14	28,74
45,78	3,82	31,50
33,45	3,51	25,95
22,25	3,10	23,81
33,83	3,52	32,26
24,15	3,18	35,31
33,97	3,53	24,05
25,85	3,25	26,96
30,26	3,41	32,96
36,44	3,60	23,15

Kontrolní charakt. gener. souboru

n=	24
mX=	27,88
sX=	4,00
VX=	0,14
X=	0,4106

Hodnoty součinitelů kn a kd,n

	Neznámé VX		Známé VX	
n	kn	kd,n	kn	kd,n
3	3,372		1,899	3,568
4	2,631	11,420	1,839	3,455
5	2,335	7,858	1,802	3,385
6	2,177	6,366	1,777	3,338
8	2,010	5,076	1,745	3,278
10	1,923	4,507	1,725	3,241
15	1,819	3,912	1,699	3,192
20	1,772	3,668	1,685	3,167
30	1,727	3,452	1,672	3,141
1000000	1,645	3,090	1,645	3,090

EN 1990 uvádí pro kd,n nepatrně nižší hodnoty

Model odolnosti - Stanovení modelu odolnosti pedle ČSN EN 1990, článků D8.2 a D8.3

Pole vstupních dat Odchylka

Pole výstupních dat Re/(b*Rt) rt

rt	re	X	V(X)	n	j	rt*rt	rt*re	δ	LN(δ)	$V(X)^2+1$	Součet Σ rt*rt=		249362,62
103,90	114,34	X1	0,06	24	2	10796	11881	0,92	-0,08	1,0036	Součet Σ rt*re=		297579,72
115,80	135,29	X2	0,12			13410	15667	0,98	-0,02	1,0144	Směrnice	b=	1,19
98,74	119,17	X3				9750	11768	1,01	0,01				
104,66	118,61					10953	12413	0,95	-0,05		Sm. odch. Lnδ	s(D)=	0,05
93,65	112,31					8771	10518	1,00	0,00		Var. koef. δ	Vδ=	0,05
100,12	129,62					10025	12978	1,08	0,08		Var. koef. Rt	Vrt=	0,13
85,95	102,42					7388	8803	1,00	0,00		Var. koef. r	Vr=	0,14
82,86	98,00					6866	8120	0,99	-0,01		Odmovnina rt	Qrt=	0,13
112,29	126,39					12609	14192	0,94	-0,06		Odmocnina δ	Qδ=	0,05
95,12	120,64					9048	11476	1,06	0,06		Odmnocnina r	Q=	0,14
101,13	115,98					10227	11729	0,96	-0,04		Souč.citliv.Qrt	art=	0,95
84,87	107,50					7203	9124	1,06	0,06		Souč.citliv. Qδ	aδ=	0,32
99,79	118,64					9957	11839	1,00	0,00		Součinitel char.h.	kn=	1,74
114,56	143,70					13123	16462	1,05	0,05		Součinitel návr.h.	kdn=	3,54
100,46	117,09					10092	11763	0,98	-0,02		Průměr teor. modelu	rm=	30,00
118,46	143,44					14034	16993	1,01	0,01		Součinitel ch.h.	fk=	0,78
91,59	116,55					8389	10675	1,07	0,06		Charakt.odolnost	rk=	23,52
107,20	119,77					11491	12839	0,94	-0,07		Součinitel náv.h.	fd=	0,64
94,46	113,24					8923	10697	1,00	0,00		Návrh. Odolnost	rd=	19,18
114,94	145,61					13212	16737	1,06	0,06		Dílčí součinitel	γm=	1,23
102,25	115,07					10455	11766	0,94	-0,06				
105,99	127,81					11234	13547	1,01	0,01				
92,01	111,63					8466	10271	1,02	0,02				
113,76	134,70					12942	15324	0,99	-0,01				

Závěrečné poznámky

- Při hodnocení zkoušek nejdříve ověřit výsledky na základě grafické znázornění, např. histogramu
- Vyloučit chyby a odlehlá pozorování
- Materiálové vlastnosti se zpravidla popisují normálním nebo lognormálním rozdělením (při variabilitě větší než ~ 0,15)
- Kombinovat kriticky postup nepřímého (prostřednictvím charakteristické hodnoty) a přímého stanovení návrhové hodnoty
- Prověřit předchozí informace (např. variabilitu, rozdělení) a využívat je obezřetně
- Bayesovský postup aplikovat po kritickém ověření apriorních informací

evropský sociální fond v ČR
podpora zaměstnanosti

Děkuji za pozornost

Milan Holický

Hodnocení vlastností materiálů podle ČSN EN 1990, přílohy D

Na řešení projektu se podílí

„Inovace metod hodnocení existujících stavebních konstrukcí“ CZ.04.3.07/4.2.01/0005

Bayesovská metoda odhadu kvantilů

Zjištěné informace: m, s, n, ν
Apriorní informace: $m', s', V(\mu), V(\sigma), (n', \nu')$
Aktualizované informace: m'', s'', n'', ν''

$$n'' = n + n'$$

$$\nu'' = \nu + \nu' - 1 \text{ je-li } n' \geq 1, \quad \nu'' = \nu + \nu' \text{ je-li } n' = 0$$

$$m'' = (mn + m'n') / n''$$

$$s''^2 = (\nu s^2 + \nu' s'^2 + n\, m^2 + n' m'^2 - n'' m''^2) / \nu''$$

$$n' = [s' / (m' V(\mu))]^2, \quad \nu' = 1/(2\, V(\sigma)^2)$$

$$x_{p,\mathrm{Bayes}} = m'' + t''_p\, (1/n'' + 1)^{1/2}\, s''$$

Příklad bayesovské metody

BETON: $n = 5$, $m = 29{,}2$ MPa, $s = 4{,}6$ MPa

$m' = 30{,}1$ MPa, $V(\mu) = 0{,}50$, $s' = 4{,}4$ MPa, $V(\sigma) = 0{,}28$

$$n' = \left(\frac{4{,}4}{30{,}1} \frac{1}{0{,}50} \right)^2 < 1 \;,\; \nu' = \frac{1}{2 \times 0{,}28^2} \approx 6$$

$n'' = 5$, $\nu'' = 10$, $m'' = 29{,}2$ MPa, $s'' = 4{,}5$ MPa

$$x_{p,\mathrm{Bayes}} = 29{,}2 - 1{,}81 \times \sqrt{\frac{1}{5} + 1} \times 4{,}5 = 20{,}3 \text{ MPa}$$

Pokryvná metoda

Soubor: x_i, n, m, s, (σ)

Konfidence γ

$$P(x_{p,\mathrm{cover}} < x_p) = \gamma$$

Známé σ

$$x_{p,\mathrm{cover}} = m - \kappa_p \sigma$$

Neznámé σ - uvažuje se odhad s

$$x_{p,\mathrm{cover}} = m - k_p s$$

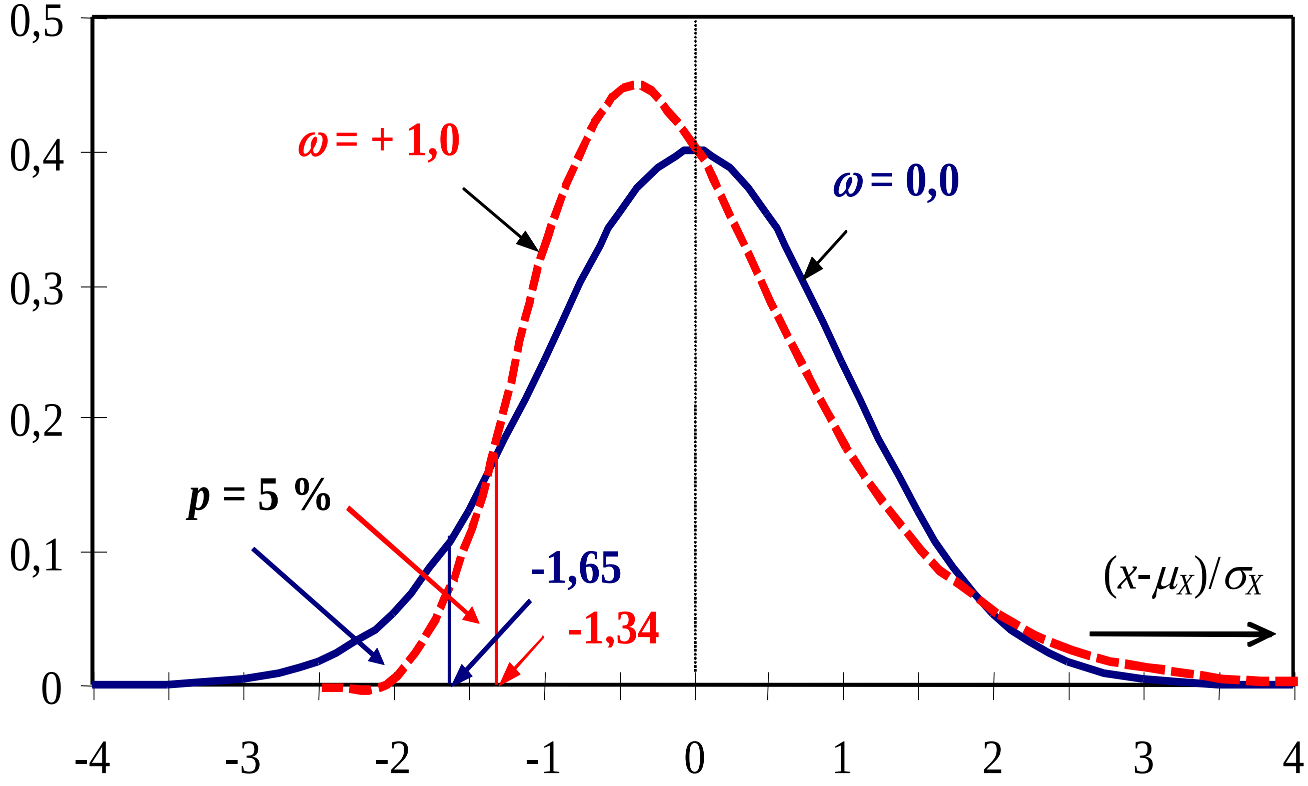
Obecný vztah pro odhad kvantilu

- x_k= průměr - k × směrodatná odchylka
- Teoretický model: $x_k = \mu_X - k_1\ \sigma_X$
- Soubor: $x_k = m_X - k_2\ s_X$ nebo $x_k = m_X - k_3\ \sigma_X$
- k součinitel směrodatné odchylky závisí na

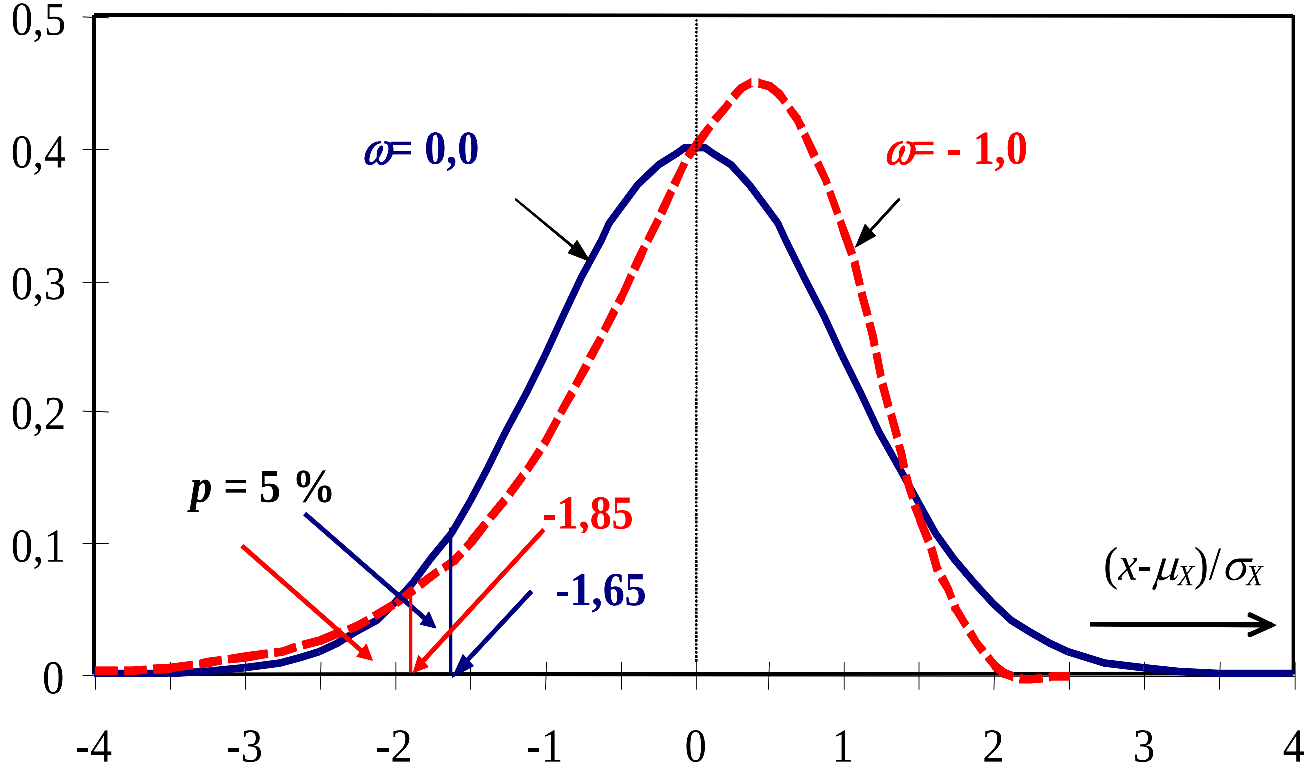
  - rozměru souboru
  - předchozí informci
  - asymetrii
  - konfidenci

Charakteristická pevnost f_k = 5 % kvantil

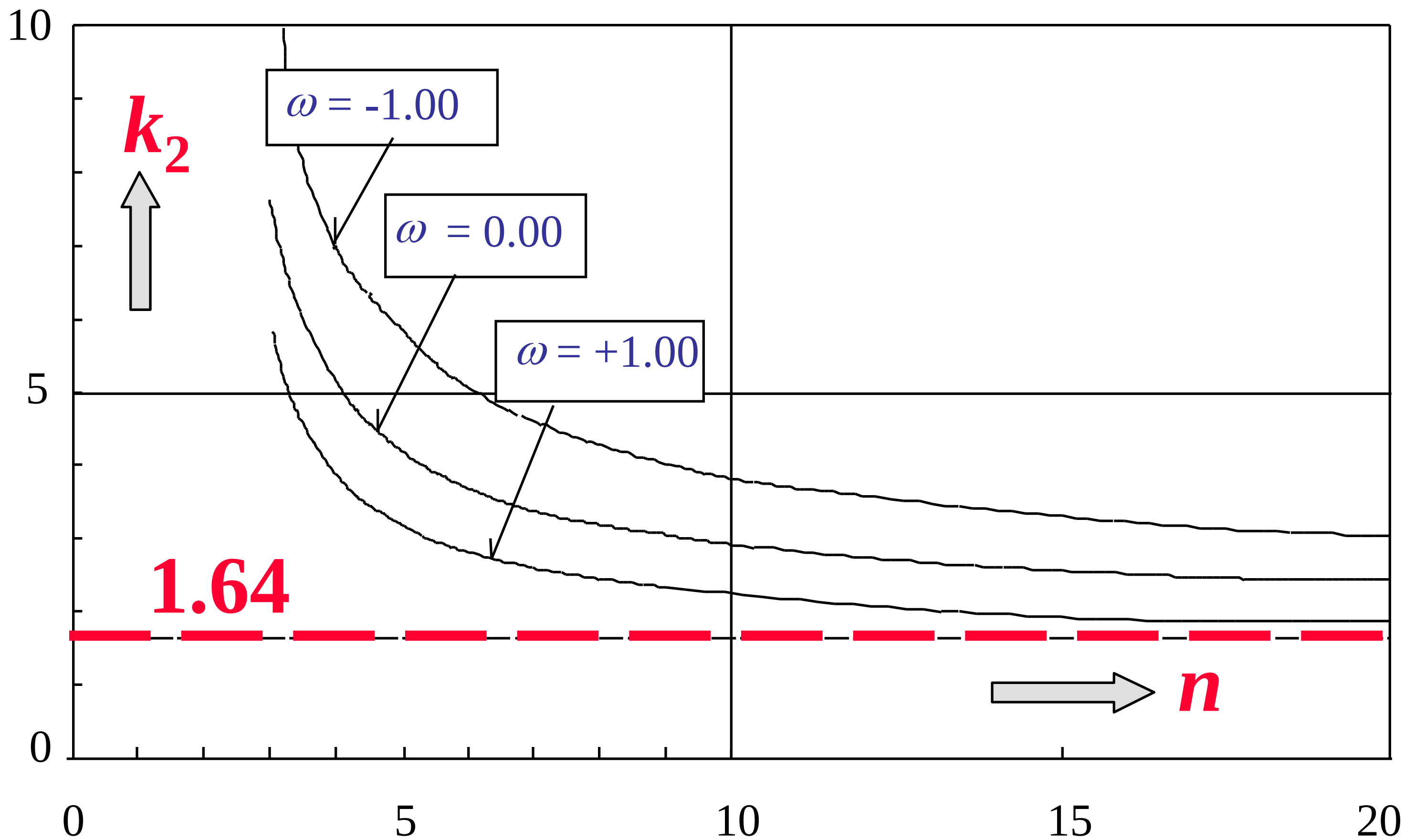
Vliv šikmosti - kladná šikmost



Vliv šikmosti - záporná šikmost



Součinitel k_2 pro odhad: $f_{\mathrm{k}} = m_X - k_2 \times s_X$



p=0.05 γ= 0.95